

UOT 372.851

QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏRİN VƏTƏRLƏR ÜSULU İLƏ HƏLLİ**Qurban İsa oğlu Əliyev***riyaziyyat üzrə fəlsəfə doktoru**Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin dosenti***ORCID:** 0009-0001-2842-8637**E-mail:** qurban.aliyev 149@mail.ru**Səkinə İmran qızı Səfiyeva***Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin baş müəllimi***ORCID:** 0000-0002-7251-1673**E-mail:** sakinasafiyeva@gmail.com<http://www.doi.org/10.62706/bqiz.2025.v25.i4.20>

Açar sözlər: qeyri xətti tənliklər, vətərlər üsulu, funksiya, törəmə, tənliyin kökü, xəta, başlanğıc yaxınlaşma, kəsiməz funksiya.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, метод хорда, функция, производная, корень уравнения, ошибка, начальное приближение, корень уравнения, разрывная функция.

Key words: nonlinear equations, chord method, function, derivative, root of the equation, error, initial approximation, root of the equation, discontinuous function.

Riyaziyyat və tətbiqi elmlərdə qarşıya çıxan bir çox məsələlərin əsasını tənliklərin həlli təşkil edir. Xüsusilə, müxtəlif sahələrdə – fizika, mühəndislik, iqtisadiyyat, informatika və s. Həyatda və elmdə qarşılaşdığımız bir çox problemlər – mexaniki hərəkət, istilik ötürülməsi, elektrik dövrləri, iqtisadi modellər və s. – məhz tənliklər vasitəsilə təsvir olunur. Tənliklərin həlli həmin proseslərin mahiyyətini anlamağa və onların gələcək davranışını proqnozlaşdırmağa imkan verir.

Qeyri-xətti tənliklərin təqribi həlli üçün bir sıra üsullar mövcuddur: parçanı yarıya bölmə iterasiya üsulu, vətərlər üsulu, toxunanlar üsulu, qarışıq üsul. Bu üsulların hamısı kökün müəyyən bir dəqiqliklə tapılmasına xidmət edir. Hər bir üsulun üstünlükləri və çatışmazlıqları var və onların seçimi konkret məsələnin xarakterindən asılıdır.

Riyaziyyatda, eləcə də bir çox tətbiqi elmlərdə qarşıya çıxan çoxlu sayda məsələlərin əsasını tənliklərin həlli təşkil edir. Xüsusilə, müxtəlif sahələrdə – fizika, mühəndislik, iqtisadiyyat, informatika və s. Həyatda və elmdə qarşılaşdığımız bir çox problemlər – mexaniki hərəkət, istilik ötürülməsi, elektrik dövrləri, iqtisadi modellər və s. – məhz tənliklər vasitəsilə təsvir olunur. Tənliklərin həlli həmin proseslərin mahiyyətini anlamağa və onların gələcək davranışını proqnozlaşdırmağa imkan verir.

Qeyri-xətti tənliklər riyaziyyatın, fizikanın, mühəndisliyin, iqtisadiyyatın və informatikanın müxtəlif sahələrində geniş tətbiq olunur. Məsələn, hərəkət qanunlarının, elektrik sahələrinin, istilik balansının və digər təbii proseslərin modelləşdirilməsində qeyri-xətti asılılıqlar əsas rol oynayır.

Qeyri-xətti tənliklərin təqribi həlli üçün bir sıra üsullar mövcuddur: parçanı yarıya bölmə iterasiya üsulu, vətərlər üsulu, toxunanlar üsulu, qarışıq üsul. Bu üsulların hamısı kökün müəyyən bir dəqiqliklə tapılmasına xidmət edir. Hər bir üsulun üstünlükləri və çatışmazlıqları var,

belə ki, onların seçimi konkret məsələnin xarakterindən asılıdır.

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında təyin olunmuş $f(x)$ funksiyası $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir; $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri (a, b) intervalında öz işarələrini saxlayır; $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasının uc nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymət alır: $f(a) \cdot f(b) < 0$. Onda aydındır ki, $[a, b]$ parçasında

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

(1) tənliyinin yeganə x^* kökü var. Fərz edək ki, $\psi(x)$ funksiyası x^* kökünün hər hansı ətrafında təyin edilmiş kəsilməz funksiyadır. Onda aşkardır ki, x^*

$$\varphi(x) = x - \psi(x) \cdot f(x), \quad (2)$$

tənliyinin də kökü olar. Ona görə də, (1) tənliyini həll etmək əvəzinə iterasiya üsulunu tətbiq edərək (2) tənliyini həll edək:

Fərz edək ki, x_0 , $[a, b]$ parçasında seçilmiş elə nöqtədir ki,

$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ şərti ödənilir. $\psi(x)$ funksiyasını aşağıdakı kimi təyin edək:

$$\psi(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

Onda (2) tənliyini belə yazmaq olar:

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \cdot f(x) \quad (3)$$

Yəni,

$$x = \frac{x_0 f(x) - x f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \quad (4)$$

şəklində yaza bilərik ki, $x_1 \in [a, b]$ yaxınlaşmasını elə seçək ki, $f(x_1)$ -in işarəsi $f(x_0)$ -ın işarəsinin əksinə olsun və (4)-dən istifadə edərək aşağıdakı kimi ardıcıl yaxınlaşmalar quraq:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, n = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

İterasiya prosesinin yığılan olmasını göstərmək üçün $\varphi'(x)$ -i qiymətləndirək:

$$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{x^* - x_0}{f(x^*) - f(x_0)} f'(x^*) = \frac{f(x_0) + (x^* - x_0) f'(x^*)}{f(x_0)};$$

Teylor düsturuna əsasən,

$$f(x) = f(x^*) + (x - x^*) f'(x^*) + \frac{(x - x^*)^2}{2} f''(\xi).$$

Burada ξ , x^* və x arasında yerləşir. Alınan bərabərlikdə $x = x_0$ yazsaq alarıq:

$$f(x_0) + (x^* - x_0) f'(x^*) = \frac{(x_0 - x^*)^2}{2} f''(\xi)$$

Bu bərabərliyi $\varphi'(x^*)$ -un ifadəsində nəzərə alsaq:

$$\varphi'(x^*) = \frac{(x_0 - x^*)^2}{2 f(x_0)} f''(\xi)$$

$$\lim_{x_0 \rightarrow x^*} \varphi'(x^*) = \lim_{x_0 \rightarrow x^*} \frac{(x_0 - x^*)^2}{2 f(x_0)} f''(\xi) =$$

Deməli, x_0 nöqtəsi x^* -a kifayət qədər yaxın olduqda $\varphi'(x^*)$ kiçik ədəd olur. $\varphi'(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz olduğundan x^* kökünün elə $\cup_{x^*}$ ətrafı var ki, həmin ətrafdan götürülmüş bütün x -lər üçün, (3)-lə təyin olunan $\varphi(x)$ funksiyasının $\varphi'(x)$ törəməsi

$|\varphi'(x)| \leq q < 1$ şərtini ödəyir. Deməli, (5) düsturu ilə düzələn $\{x_n\}$ ardıcılığı x^* kökünə yığılır.

(1) tənliyinin yuxarıdakı qayda ilə təqribi həllinin tapılması üsuluna vətərlər üsulu deyilir. Bu ad onunla izah olunur ki, x_{n+1} -ə həndəsi olaraq $(x_0; f(x_0))$ və

$(x_n; f(x_n))$ nöqtələrindən keçən düz xəttin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi baxmaq olar.

Vətərlər üsulunun xətasını qiymətləndirək. Sonlu artım düsturuna görə

$$f(x_n) = f(x_n) - f(x^*) = f'(\eta)(x_n - x^*).$$

Burada η , x_n və x^* arasında yerləşir. Yuxarıdakı bərabərlikdən

$$|x_n - x^*| = \frac{|f(x_n)|}{|f'(\eta)|} \leq \frac{|f(x_n)|}{M_2}, \quad (6)$$

alırıq. Burada $M_2 = \min_{[a;b]} |f'(x)|$

Praktik hesablamalarda aşağıdakı xəta düsturundan istifadə etmək əlverişlidir:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_1 - M_2}{M_2} |x_n - x_{n-1}| \quad (7)$$

Burada, $M_1 = \max_{[a;b]} |f'(x)|$, $M_2 = \min_{[a;b]} |f'(x)|$

Qeyd edək ki, $M_1 \leq 2M_2$ olduqda (7)-dən alınır ki,

$$|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

Tənliyin kökünü vətərlər üsulu ilə ε dəqiqliklə hesablamaq üçün

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_1 - M_2}{M_2} |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Bərabərsizliyinin ödənilməsi tələbini qoymaq lazımdır.

Beləliklə, vətərlər üsulu ilə (1) tənliyinin kökünü ε dəqiqliklə hesablamaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:

- 1) Tənliyin kökünün daxil olduğu aralığın tapılması;
- 2) x_0 başlanğıc yaxınlaşmasının $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ şərtindən, $x_1 \in [a, b]$ yaxınlaşmasının isə $f(x_1)$ -in işarəsinin $f(x_0)$ -in işarəsinə əks olması şərti ilə seçilməsi;
- 3) (5) düsturu vasitəsilə təqribi həllərin tapılması;
- 4) Hesablama prosesinin

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{M_2}{M_1 - M_2} \cdot \varepsilon = \varepsilon_1$$

şərti ödənilənə kimi davam etdirilməsi.

İndi isə vətərlər üsuluna aid bir misalı həll edək:

Misal: Vətərlər üsulu ilə verilmiş tənliyin kökünü 0,0001 dəqiqliklə hesablayın.

$$x^3 - 3x^2 + 6x + 5 = 0$$

Həlli:

1) kökün daxil olduğu aralığı tapaq.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 5$$

$$f(-1) = -5 < 0; f(-0.5) = 1.125.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6, f''(x) = 6x - 6.$$

$\forall x \in (-1; -0.5)$ üçün $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$. $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri $(-1; -0.5)$ intervalında öz işarələrini saxlayır. Deməli, $[-1; -0.5]$ parçasında tənliyin yeganə kökü var.

2) $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ şərtindən x_0 başlanğıc yaxınlaşmasını seçək.

$f(-1) \cdot f''(-1) > 0$. Deməli, $x_0 = -1$ seçmək olar. x_1 yaxınlaşmasını isə elə seçək ki, $f(x_1)$ -in işarəsi $f(x_0)$ -in işarəsinin əksinə olsun.

$$f(x_0) = f(-1) < 0;$$

$$f(x_1) = f(-0.5) = 1.125 > 0.$$

Deməli, $x_1 = -0.5$ seçmək olar.

3) M_1 və M_2 kəmiyyətlərini hesablayaq.

$$M_1 = \max_{[-1; -0.5]} |f'(x)| = \max_{[-1; -0.5]} |3x^2 - 6x + 6| = f(-1) = 15,$$

$$M_2 = \min_{[-1; -0.5]} |f''(x)| = \min_{[-1; -0.5]} |6x - 6| = f(-0.5) = 9.75$$

$M_1 \leq 2M_2$ olduğundan $|x_n - x^*| \leq |x_n - x_{n-1}|$ olur. Beləliklə, hesablama prosesini $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ şərti ödənənə kimi davam etdirməliyik.

$x_0 = -1$ və $f(x_0) = -5$ qiymətlərini vətərlər düsturunda yerinə qoyaq:

$$x_{n+1} = \frac{-f(x_n) + 5x_n}{f'(x_n) + 5}, n = 1, 2, 3 \dots$$

və ya

$$x_{n+1} = \frac{((3-x_n)x_n - 1)x_n - 5}{((x_n - 3)x_n + 6)x_n + 10}; n = 1, 2, \dots$$

$x_1 = -0.5$ olduqda

$$x_2 = \frac{((3 - (-0.5)) \cdot (-0.5) - 1) \cdot (-0.5) - 5}{((-0.5 - 3) \cdot (-0.5) + 6) \cdot (-0.5) + 10} = \frac{-3.625}{6.125} = -0.59184,$$

$$x_3 = \frac{((3 - x_2)x_2 - 1)x_2 - 5}{((x_2 - 3)x_2 + 6)x_2 + 10} = \frac{-3.1500298}{5.19083} = -0.60685,$$

$$x_4 = \frac{((3 - x_3)x_3 - 1)x_3 - 5}{((x_3 - 3)x_3 + 6)x_3 + 10} = \frac{-3.0511063}{5.004907} = -0.60962,$$

$$x_5 \approx \frac{((3 - x_4)x_4 - 1)x_4 - 5}{((x_4 - 3)x_4 + 6)x_4 + 10} = \frac{-3.0489134}{5.000814} = -0.60968.$$

$$|x_5 - x_4| = 0.00006 < 0.0001.$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin köklərindən biri $x \approx -0.6096$ olar.

Verilmiş tənliyin uyğun proqram əsasında kompüterdə icrası zamanı aşağıdakı nəticə alınmışdır:

$$x_0 = -1, x_1 = -0.5, x_2 = -0.59184, x_3 \approx -0.60685,$$

$$x_4 \approx 0.60968, x_5 \approx -0.60968.$$

Problemin aktuallığı. Riyaziyyatın və tətbiqi elmlərin bir çox sahəsində elə tənliklərə rast gəlinir ki, onların köklərini dəqiq şəkildə tapmaq mümkün olmur. Belə tənliklər qeyri-xətti tənliklər adlanır və onların həlli çox zaman sadə riyazi üsullarla deyil, təqribii üsullarla həyata keçirilir.

Problemin elmi yeniliyi. Riyaziyyatın, eləcə də tətbiqi elmlərin bir çox sahəsində elə tənliklərə rast gəlinir ki, onların köklərini dəqiq şəkildə tapmaq mümkün olmur. Belə tənliklər qeyri-xətti tənliklər adlanır və onların həlli çox zaman sadə riyazi üsullarla deyil, təqribii üsullarla həyata keçirilir. Onlardan biri vətərlər üsulu tətbiq olunur və kompüterin icrası ilə də cavablar alınır.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Məqalədən ali və ixtisas məktəblərinin müəllimləri, tələbə və magistrantlar istifadə edə bilərlər.

Ədəbiyyat

1. Y.C. Məmmədov. Təqribi hesablama üsulları. Dərs vəsaiti. Bakı, 2016.
2. M. Mehdiyev, R. Əhmədov E. Eyvazov, Y. Şərifov. Ədədi üsullar : Dərslik. Bakı, 2008.
3. Z.Q. Hüseynov. Hesablama üsulları və praktikum: Dərs vəsaiti. Bakı, 2003.
4. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М.Кобельков. Численные методы. Наука. 1987.

Q.İ.Əliyev, S.İ.Səfiyeva

Qeyri-xətti tənliklərin vətərlər üsulu ilə həlli

Xülasə

Riyaziyyat və tətbiqi elmlərin bir çox sahələrində mövcud olan bir çox tənliklərin köklərinin dəqiq həllini tapmaq mümkün deyildir. Belə tənliklər qeyri-xətti tənliklər adlanır və onların həlli çox vaxt sadə riyazi üsullarla deyil, təqribi üsullarla həyata keçirilir. Qeyri-xətti tənliklər riyaziyyat, fizika, mühəndislik, iqtisadiyyat və kompüter elmlərinin müxtəlif sahələrində geniş istifadə olunur. Məsələn, qeyri-xətti asılılıqlar hərəkət qanunlarının, elektrik sahələrinin, istilik balansının və digər təbii proseslərin modelləşdirilməsində əsas rol oynayır. Riyaziyyat və tətbiqi elmlərin bir çox sahələrində köklərini dəqiq tapmaq mümkün olmayan tənliklər mövcuddur. Belə tənliklər qeyri-xətti tənliklər adlanır və onların həlli çox vaxt sadə riyazi üsullarla deyil, təxmini üsullarla həyata keçirilir.

К.И.Алийев, С.И.Сафийева

Решение нелинейных уравнений методом сухожилий

Резюме

Во многих областях математики и прикладных наук встречаются уравнения, корни которых невозможно найти точно. Такие уравнения называются нелинейными уравнениями, и их решение часто осуществляется не простыми математическими методами, а приближенными.

Нелинейные уравнения широко используются в различных областях математики, физики, техники, экономики и информатики. Например, нелинейные зависимости играют ключевую роль в моделировании законов движения, электрических полей, теплового баланса и других природных процессов.

Q.İ.Aliyev, S.İ.Sefiyeva**Solution of nonlinear equations by tendon method****Summary**

In many fields of mathematics and applied sciences, there are equations whose roots are impossible to find exactly. Such equations are called nonlinear equations, and their solution is often carried out not by simple mathematical methods but by approximate ones.

Nonlinear equations are widely used in various fields of mathematics, physics, engineering, economics, and computer science. For example, nonlinear dependencies play a key role in modeling the laws of motion, electric fields, heat balance, and other natural processes.

Redaksiyaya daxil olub: 05.12.2026