

RIYAZİYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

UOT 372.851

BƏZİ QEYRİ-STANDART MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ TÖRƏMƏNİN TƏDBİQİ

Fəxrəddin Feyzullah oğlu Əliyev

*Sumqayıt Dövlət Universitetinin Riyaziyyat və informatikanın
tədrisi texnologiyası kafedrasının dosenti*

ORCID: 0000-0002-2039-2334

E-mail: af_64@mail.ru

Ziba Novruz qızı Rəhimova

Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi

ORCID: 0009-0009-1933-1831

Dilbər Məhəmməd qızı Qasımzadə

Sumqayıt Dövlət Universiteti nəzdində Sumqayıt Dövlət Texniki Kollecinin müəllimi

ORCID: 0009-0001-8801-1120

<http://www.doi.org/10.62706/bqiz.2025.v25.i4.19>

Açar sözlər: törəmə, bərabərsizlik, eynilik, ədədlərin müqayisəsi, dövrü funksiya, bacarıq, isbat, tətbiq, funksiya, ardıcılıq, artan, azalan.

Ключевые слово: производная, неравенство, тождество, сравнение чисел, периодическая функция, умение, доказательство, применение, функция, последовательность, увеличение, убывание.

Key words: derivative, inequality, identity, comparison of numbers, periodic function, skill, proof, application, function, sequence, increasing, decreasing.

Funksiyanın törəməsi anlayışı nəinki riyaziyyatın, o cümlədən fizikanın, kimyanın, iqtisadiyyatın və bir çox başqa elmlərin praktik hesablamalarında tətbiq edilir. Bundan əlavə, riyaziyyatın elə məsələləri vardır ki, törəmənin köməyi ilə ən səmərəli və optimal şəkildə həll edilir. Elə xüsusi tip misallar da vardır ki, ənənəvi metodlar deyil, məhz törəmənin tətbiqi ilə həlli daha maraqlı kəsb edir. Məqalədə bu tip xüsusi misalların həlli araşdırılacaqdır.

XX əsrin sonlarında riyazi analiz elementlərinin məktəb proqramına daxil edilməsi qarşıda duran tələblərin ödənilməsinə geniş imkanlar yaratdı. Riyazi analizin elementlərinin məktəb kursunda tədrisi ilə bağlı yazılan dərsliklərlə yanaşı bir sıra metodik vəsaitlər, göstərişlər çap olunmuşdur. Bu sahədə akad.A.N. Kolmoqorov, akad.C.M. Nukoliski və başqaları fərqləndirilir.

Riyazi analizin elementləri içərsində “Törəmə” anlayışının orta məktəb şagirdlərinə öyrədilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Törəmə anlayışının öyrədilməsi prosesində şagirdlər bir sıra çətinliklərlə rastlaşırlar. Bu çətinliklər əsasən törəmənin tətbiqi məsələlərində rast gəlinir. Çünki tətbiq məsələlərinə dair materiallar orta məktəbin cəbr və analizin başlanğıcı dərslərində çox az yer verilmişdir. Bu nöqteyi-nəzərdən məqalədə törəmənin tətbiqi ilə bəzi məsələlərin həlli üsullarını nümunələr əsasında verək:

I. Törəmənin köməyiylə bəzi bərabərsizliklərin isbatı:

Ədədi bərabərsizliklərin isbat üçün bir çox məşhur adlı bərabərsizliklər vardır: Koşi-Bunyakovski, Çebişev, Qelder və sair. Ancaq elə funksional ifadələr olur ki, onların müqayisəsi üçün qeyd olunan bərabərsizliklər nəticə vermir, bu zaman ən ümumi olan funksiyanın törəmə vasitəsi ilə araşdırılması metoduna müraciət etməli olursan. Beləliklə, bərabərsizliklərin isbatında törəməni tətbiq etmək üçün müxtəlif üsullar vardır. Həmin üsullardan biri törəməni tətbiq etməklə funksiyanın artan və azalan olması xassəsindən istifadə etməkdir. Bunu bir neçə misal üzərində göstərək.

Misal 1. Bərabərsizliyi isbat edin: $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}, x \geq 0$

Həllin araşdırılması: Göründüyü kimi bu misalda loqarifmik və kəsr-rasional funksiyaların öz təyin oblastlarında müqayisəsi istənilir. Deməli verilmiş funksiyaların xüsusiyyətlərini və törəmə funksiyanı araşdırmaq lazımdır;

$]0; +\infty[$ intervalında verilmiş funksiyanı sadələşdirək. Verilmiş bərabərsizliyə $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$ funksiyası kimi baxıb törəmə alaq. Onda, $f'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ alarıq. Deməli, f funksiyası verilmiş intervalda artandır. Funksiya kəsilməyən olduğu üçün belə çıxır ki, $]0; +\infty[$ aralığının $x=0$ nöqtəsində funksiya ən kiçik qiymət alır və $f(0)=0$. Odur ki, $x \geq 0$ olduqda $f(x) \geq f(0)$ və ya $f(x) \geq 0$ olur. Buradan $\ln(x+1) \geq \frac{2x}{x+2}, x \geq 0$ bərabərsizliyinin doğruluğu alınır.

Misal 2. Bərabərsizliyi isbat edin: $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}, x \geq -1$

Həllin araşdırılması: Bu misalda isə 2-ci dərəcədə kökaltı funksiya ilə kəsr-rasional funksiyaların öz təyin oblastlarında müqayisə edilməsi lazımdır. Araşdırmanı aparmaq üçün fərqli yanaşma edək :

$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{x}{2}$ götürək. Əgər götürdüyümüz funksiya törəmə alsaq. Yəni, $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1)$ olar. Buradan, $x > 0$ olduqda $f'(x) < 0$ olur. Digər tərəfdən $x > 0$ qiymətlərində f funksiyası $-1 \leq x < 0$ qiymətlərində $f'(x) > 0$ olduğu üçün f funksiyası artandır. $f(0)=0$ olduğu üçün alırıq ki, $x \geq -1$ qiymətlərində $f(x) \leq f(0)$ və ya $f(x) \leq 0$ olur və bununla da $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}, x \geq -1$ bərabərsizliyi həll olunur.

Misal 3. $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0$ olduqda bərabərsizliyi həll edin.

Həllin araşdırılması: maraqlı nümunə olaraq, eksponensial və kvadratik funksiyaların müqayisəsi verilmişdir:

$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ götürək. Götürülmüş funksiyanın törəməsini tapaq.

Onda $f'(x) = e^x - 1 - x$ alarıq. Əgər $g(x) = e^x - 1 - x$ qəbul edib yenidən törəmə alsaq: $g'(x) = e^x - 1$ olar. Aldığımız törəmə $]0; +\infty[$ intervalında $e^x - 1 > 0$ olduğundan $g(x)$ funksiyası artandır və $g(x) > g(0) = 0$ olar. Əgər əvəzləmədə nəzərə alsaq onda $f'(x) = g(x) > 0$ bərabərsizliyini alırıq ki, bu da $f(x)$ funksiyanının $]0; +\infty[$ intervalında artan olduğunu göstərir və $f(x) > f(0) = 0$ olur. buradan da $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}, x \geq 0$ bərabərsizliyinin doğruluğu alınır.

II. Mürəkkəb və transendent ədədlərin müqayisəsində törəmənin tətbiqi.

Yuxarıda adları qeyd olunan məşhur bərabərsizliklər heç də universal deyildir, məsələn, mürəkkəb və ya transendet ədədlərin müqayisəsi bu baxımdan daha maraqlıdır. Elə ədədi bərabərsizliklər var ki, bunların isbatı üçün müəyyən funksiyanın törəməsindən istifadə etmək lazımdır. Misal nümunəsində fikrimizi izah edək.

Misal 4. Aşağıdakı ədədlərdən hansı böyükdür:

a) 107^{113} yoxsa 113^{107} ; b) 1974^{2001} yoxsa 2001^{1974} ; c) 100^{101} yoxsa 101^{100} ; d) e^{π} yoxsa π^e ; e) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ yoxsa $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

Həllin araşdırılması: Əvvəlcə daha ümumi şəkildə verilən ədədlərin müqayisəsinə baxaq. Əgər $0 < x < y$ olarsa, hansı şərtlər ödənildikdə $x^y < y^x$ və ya $x^y > y^x$ bərabərsizliyi ödənilir? Aydındır ki, bərabərsizliyi $y \ln x < x \ln y$ və ya $\frac{1}{x} \ln x < \frac{1}{y} \ln y$ bərabərsizliyi ilə eyni-güclüdür.

Odur ki, $f(x) = \frac{1}{x} \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ olur. Buradan $0 < x < e$ olarsa, $1 - \ln x > 0$ olar və $x > e$ olarsa, $1 - \ln x < 0$ olar ki, $f(x)$ funksiyası $]0; e[$ intervalında artan, $[e; +\infty[$ intervalında isə azalandır.

Beləliklə, $0 < x < y < e$ şərtləri ödənildikdə $\frac{1}{x} \ln x < \frac{1}{y} \ln y$ olar. Buradan isə alınır ki, $x^y < y^x$ -dir. Digər tərəfdən $0 \leq x < y$ şərti ödənildikdə isə $\frac{1}{x} \ln x > \frac{1}{y} \ln y$ və ya $x^y > y^x$ bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizliklərdə alınır ki, a) $107^{113} > 113^{107}$; b) $1974^{2001} > 2001^{1974}$; c) $100^{101} > 101^{100}$; d) $e^{\pi} > \pi^e$; e) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

III. Periodik funksiyaların törəmə vasitəsilə tədqiqi:

Orta məktəb riyaziyyat kursunda həm şagirdlər, həm də müəllimlər üçün maraqlı və bir çox hallarda isə çətinlik dərəcəsiylə fərqlənən bölmələrdən biri də funksiyanın dövriliyi, ən kiçik dövrün tapılmasıdır. Bu tip məsələlərin həlli üçün orta məktəb riyaziyyatında müəyyən qədər nəzəri və praktik bilgilər olsa da, ümumi halda verilən funksiyalar üçün kifayət qədər ciddi çətinliklər vardı. Ona görə də törəmənin tətbiqinə müraciət etmək zərurəti yaranır.

Məlumdur ki, periodik funksiyanın sonlu törəməsi varsa, onda onun törəmə funksiyası həmin dövrədən periodik funksiya olur. Bu xassəyə əsasən, törəməni tətbiq etməklə verilən funksiyanın periodik olmasını təyin etmək olur. Misal nümunəsində fikrimizi izah edək.

Misal 5. $f(x) = x^2$ funksiyasının periodik olmadığını göstərin.

Həllin araşdırılması: Bu misalda verilmiş funksiyanın analitik şəkli sadə olmasına baxmayaraq, xüsusi bir metod məlum deyil. Ancaq törəmənin köməyi ilə funksiyanın periodikliyi şərtinin ödəndiyini, və yaxud da pozulduğunu müəyyən edə bilirik:

Verilmiş funksiyanın törəməsini tapsaq $f'(x) = 2x$ alırıq. Törəmə funksiyası bütün ədəd oxunda artan olduğu üçün periodik deyil. Deməli, verilmiş funksiya periodik deyil.

Misal 2. $f(x) = x^2 + \sin x$ funksiyasının periodik olmadığını göstərin.

Həllin araşdırılması: Tutaq ki, verilən funksiya periodikdir və T ədədi onun periodudur. Onda T ədədi verilmiş funksiyanın ikinci tərtib törəməsində periodu olmalıdır. Funksiyanın ikinci tərtib törəməsi $f''(x) = 2 - \sin x$ -dir. Digər tərəfdən $f(x) + f''(x) - 2 = x^2$ bərabərliyinin sol tərəfi də T periodlu funksiya olmalıdır. Lakin yuxarıda göstərdik ki, x^2 periodik deyil. Alınan ziddiyyət funksiyanın periodik olmadığını göstərir.

V. Ədədi ardıcılıqların ən böyük həddinin tapılmasında törəmənin tətbiqi:

Ədədi ardıcılıqların ümumi həddinin, ən böyük həddinin, hansısa nömrəli həddin tapılmasının bir çox metodları məlumdur. Ancaq elə ədədi ardıcılıqlar verilə bilər ki, ümumi metodlar məsələnin həllində yaralı olmur. Bu problemin də həllində ardıcılığın şərti olaraq, uyğun funksiya kimi qəbul edib, törəməni tətbiq edərək, həmin funksiyanı araşdıraraq, axtarılan suala cavab tapmaq olar.

Əgər $\{a_n\}$ ardıcılığının ən böyük həddi varsa, bu hədd $\mu = \max a_n$ şəklində işarə olunur. Həmin həddin indeksinə mərkəzi indeks deyilir və γ ilə işarə olunur.

Əgər ardıcılığın μ -yə bərabər olan bir neçə həddi olarsa, onda γ onların indeksləri içərişində ən böyüyü götürülür.

Misal 6. $\left\{\frac{n^2}{n^3+200}\right\}, n \in \mathbb{Z}$ olduqda, ardıcılığının ən böyük həddini tapın.

Həllin araşdırılması: Ardıcılığın ümumi həddi $a_n = \frac{n^2}{n^3+200}$ olduğunu nəzərə alaraq $f(x) = \frac{x^2}{x^3+200}$ funksiyasını götürüb $[1, +\infty[$ aralığında araşdıraraq: $f(x) = \frac{x(400-x^3)}{(x^3+200)^2}$ törəməsi $0 < x < \sqrt[3]{400}$ aralığında müsbət, $\sqrt[3]{400} < x < +\infty$ aralığında isə mənfi olduğu üçün birinci aralıqda artan, ikinci aralıqda azalandır. Bunu nəzərə alsaq, bərabərsizliyindən $7 < \sqrt[3]{400} < 8$ çıxır ki, verilən ardıcılığın ən böyük həddi, a_7 yaxud a_8 olmalıdır. $a_7 = \frac{49}{543}$ və $a_8 = \frac{8}{89}$ olduğu üçün ardıcılığın ən böyük həddi $a_7 = \frac{49}{543}$ olur.

VI. Məlum üstlü – loqarifmik və tərs - triqonometrik eyniliklərin isbatında törəmənin tətbiqi.

Orta məktəb riyaziyyat kursunda qüvvədə olan dərslərlər, dərslər saatları, tədris proqramları bir çox hallarda proqrama daxil olan analitik düsturların isbatını şagirdlərə öyrətmək-tədris etmək mümkün olmur ki, bu da təbii ki, yolverilməzdir və özünün mənfi təsirlərini sonralar tələbə olduqda yaranır. Çıxış yolu olaraq, törəmədən istifadə edək:

Funksiyanın sabitlik əlamətinə görə müəyyən bir aralıqda $F'(x)=0$ olarsa, onda həmin aralıqda $F(x)=C$ (C -sabitdir). Başqa şəkildə $[a, b]$ parçasında $f'(x)=g'(x)$ olarsa, onda bu funksiyalar sabitlə fərqlənir, yəni $f(x)=g(x)+C$. Bu əlamətə əsasən bir sıra eynilikləri isbat etmək olar.

Misal 7. $x > 0$ və $x > 0$ olduqda, $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ olduğunu isbat edin.

Həllin araşdırılması-isbatı: $f(x) = \log_a bx$ və $g(x) = \log_a x$ funksiyalarından törəmə alaq və $]0, +\infty[$ intervalında araşdıraraq. $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ və $g'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$ törəmələrini alırıq. Göründüyü kimi, alınan törəmələr bərabərdir. Bu bərabərlikdən sabitlər fərqlənəcək, yəni $\log_a bx = \log_a x + C$. Buradan C -ni tapaq. $x=1$ götürsək, $\log_a b \cdot 1 = \log_a 1 + C, C = \log_a b$ olur. C -nin qiymətini yerinə yazsaq, alırıq:

$\log_a bx = \log_a x + \log_a b$. Burada $b=y$ yazsaq, eyniliyin doğruluğunu isbat etmiş oluruq.

Misal 8. $\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ eyniliyini isbat edin.

İsbatı. Əgər sol tərəfi $F(x)$ ilə işarə edib törəmə alsaq: $F(x) = \arctg x + \operatorname{arcctg} x$ olar. Onda, $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ alırıq.

Törəmə sıfıra bərabər olduğu üçün funksiyanın sabitlik əlamətinə görə funksiya sabitə bərabərdir: $F(x) = C$, (C -sabitdir).

Buradan C -ni tapmaq üçün bərabərlikdə $x=1$ götürək. Onda alırıq:

$$\arctg 1 + \operatorname{arcctg} 1 = C \Rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

C-nin qiymətini yerinə yazsaq, $\arctg x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ eyniliyi alınar ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

Problemin aktuallığı. Funksiyanın törəməsinin tədqiqinin nəticələrindən praktikada geniş istifadə olunur. Məqalədə müxtəlif məsələlərin həllində baxılan üsullardan istifadə edilir. Bu isə şagirdlərin təfəkkürünün inkişaf etdirilməsində xüsusi aktuallıq kəsb edir. Tətbiq edilən metodiki yanaşmalar həmçinin öyrədənlər üçün də maraqlı olacaq. Törəmənin məqalədə qeyd edilən tətbiqləri həm orta məktəb riyaziyyat kursunda, həm də ali məktəblərdə aktuallığı baxımdan səmərəli sayıla bilər.

Problemin elmi yeniliyi. Məqalədə funksiyanın törəməsi anlayışının mükəmməl tətbiqi öyrədilir. Həmçinin riyazi düsturlara daha yaradıcı yanaşma yollarını göstərir. Ümumi hallarda müxtəlif suallara praktik cavab hazırlığının olması araşdırılır. Riyaziyyatın ən müxtəlif bölmələri üzrə məsələlərin həlli araşdırılır.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Baxılan isbat üsullarından istifadə etməklə riyaziyyatın tədrisində daim aktual olan və öyrədənlər və öyrənənlər üçün stimullaşdırıcı, metodiki xüsusiyyətlərin formalaşdırılması baxımından əhəmiyyətlidir.

Ədəbiyyat

1. Quliyev Ə.A. X-XI siniflərdə cəbr və analizin başlanğıcı. Bakı, 2014.
2. Əliyev R.Ə., Abdullayev C.S. Riyazi analizdən məsələ və misallar. Bakı, 2001.
3. Sadıqov N.A. Limitdən inteqrala. Bakı, 1971.
4. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математи-ческому анализу. Москва, 1977.
5. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. М., 1980.
6. Никольский С.М. Элементы математического анализа. М., 1981.
7. Понтрягин Л.С. математический анализ для школьников. М., 1980.

F.F.Əliyev, Z.N.Rəhimova, D.M.Qasımzadə

Bəzi qeyri-standart məsələlərin həllinə törəmənin tətbiqi

Xülasə

Məqalədə riyazi analizin elementlərindən biri olan törəmə anlayışının köməyi ilə müxtəlif qeyri-standart məsələlərin həllinin maraqlı şərtləri verilmişdir. Törəmə anlayışı bir çox elm sahələrinə tətbiq olunduğu üçün onun tətbiq sahələri genişdir. Məqalədə törəmənin tətbiqi ilə bərabərsizliklərin, üstlü-loqarifmik və tərs-triqonometrik funksiyaların araşdırılması öz əksini tapmışdır.

Ф.Ф.Алиев, З.Н.Рахимова, Д. М.Гасымзаде

Применение производной к решению некоторых нестандартных задач

Резюме

В статье обосновывается интерес к решению различных нестандартных задач с помощью понятия производной, являющегося одним из элементов математического анализа. Поскольку понятие производной применяется во многих областях науки, области её применения широки. В статье отражено исследование неравенств, показательно-логарифмических и обратно-тригонометрических функций с применением производной.

F.F.Aliyev, Z.N.Rahimova, D.M.Gasimzadeh

Application of the derivative to the solution of some non-standard problems

Summary

The article provides explanations of the interest in solving various non-standard problems with the help of the concept of derivative, which is one of the elements of mathematical analysis. Since the concept of derivative is applied to many fields of science, its application areas are wide. The article reflects the study of inequalities, exponential-logarithmic and inverse-trigonometric functions with the application of derivative.

Redaksiyaya daxil olub: 04.11.2025