

RIYAZIYYATIN TƏDRİSİ METODİKASI
МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
METHODS OF TEACHING MATHEMATICS

UOT 372.851

ÜÇBUCAQLAR VƏ ONLARA AİD BƏZİ MƏSƏLƏLƏRİN
İSBAT YOLU İLƏ HƏLLİNƏ DAİR

Leyla Sübhan qızı Şıxlinskaya

Azərbaycan Dövlət Pedaqoji Universitetinin magistrantı

ORCID: 0009-0004-7842-0918

E-mail: hleeyla234@gmail.com

Açar sözlər: üçbucaq, median, hündürlük, isbat, induksiya, deduksiya, anlayış, məntiq, xassə, teorem, təklif, obyekt, analitik, sintetik.

Ключевые слова: треугольник, медиана, высота, доказательство, индукция, дедукция, понятие, логика, свойство, теорема, утверждение, объект, аналитическое, синтетическое.

Key words: triangle, median, altitude, proof, induction, deduction, concept, logic, property, theorem, proposition, object, analytical, synthetic.

İsbat anlayışı riyaziyyatın və məntiqin mərkəzi anlayışlarından biri olub, onun bütün hallarda və ixtiyari elmi nəzəriyyələrdə tətbiq edilə bilən birqiymətli tərfi yoxdur. Məntiqdə ən ümumi şəkildə isbat dedikdə, hər hansı təklifin doğruluğunu, doğruluğu artıq isbat edilmiş digər təkliflərə gətirmək yolu ilə müəyyən edən mühakimə başa düşülür.

Riyaziyyatda isbat prosesinin özünəməxsus xüsusiyyəti var. Belə ki, hər bir isbat prosesi heç bir təcrübəyə və ya əyaniliyə istinad etmədən, yalnız və yalnız məntiq qanunlarına əsaslanır. Bu baxımdan riyazi məntiqə aid bəzi ədəbiyyatlarda isbat prosesinə verilən aşağıdakı tərif də cəlbədidir.

İsbat — doğruluğu isbat edilmiş təkliflərə əsaslanaraq, yeni təkliflərin doğruluğunun müəyyən edilməsinə imkan verən təfəkkür prosesidir.

İsbat prosesində tezis və arqument arasındakı asılılığı göstərən mühakimələri müxtəlif yollarla qurmaq olar. Həmin yollar isbat üsulları adlanır. Bu üsullar müxtəlif məntiqi struktura malik ola bilər və müxtəlif məntiq qanunlarına əsaslanı bilər. Bu səbəbdən də riyaziyyatda müxtəlif isbat üsullarından istifadə olunur. Bütün isbat üsulları iki əsas qrupa bölünür.

1) Düzünə isbat üsulları, 2) Dolayı isbat üsulları.

Düzünə isbat prosesinin qarşısında duran əsas vəzifə elə bir inkar edilməz arqument tapmaqdır ki, teoremin tezisi ondan məntiqi olaraq alınsın. Bu zaman arqument kimi elə doğru təkliflərə istinad etmək zəruri olur ki, tezis doğruluğuna gətirə bilən deduktiv mühakimələr zənciri qurula bilsin. Düzünə isbat üsullarının ən tipik növü induksiya üsuludur.

Dolayı isbat üsullarında isə tezis doğruluğu onun əks təklifinin — antitezisin səhv olmasının aşkar edilməsi yolu ilə müəyyən edilir. Deməli, dolayı isbat üsullarının tətbiqi prosesində tezis doğruluğunu göstərmək üçün bir başa arqumentlər axtarmaq əvəzinə, antitezis (tezin inkarı) şərh edilir, bu və ya digər yolla onun doğru olmadığı göstərilir.

Beləliklə, dolayı isbat üsulunun əsasında tezin inkarı qaydası durduğundan, əksini

fərz etmə üsulu dolayı isbat üsullarının tipik növüdür. Məktəb riyaziyyat kursunda tətbiq olunan əsas isbat üsulları aşağıdakılardır.

1) Analitik isbat; 2) Sintetik isbat; 3) Əksini fərz etmə; 4) Kontrapozisiya üsulu; 5) Riyazi induksiya.

Məktəb riyaziyyat təlimində “Həndəsə” məzmun xəttinin əsas bölmələrindən biri üçbucaqlar bölməsidir. Üçbucaqlar “Həndəsə” məzmun xəttinin əsas fəqurlarından biridir. Əvvəlcə üçbucağın sadə riyazi tərifini verək: **Müstəvinin bir düz xətt üzərində olmayan 3 nöqtəsini (üçbucağın təpələri) cüt-cüt birləşdirən 3 parçası (üçbucağın tərəfləri) ilə hüdudlanmış hissəsinə üçbucaq deyilir.** Üçbucaqlara aid isbat məsələlərini yerinə yetirmək üçün üçbucağın bəzi xassələri ilə qısa-qısa tanış olaq və əsas mövzuya keçək.

- Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180° -dir.
- Üçbucağın xarici bucaqlarının cəmi 360° -dir.
- Üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf, kiçik bucaq qarşısında kiçik tərəf olur.
- Üçbucağın hər hansı bir tərəfinin uzunluğu digər iki tərəfin uzunluqları cəmindən kiçik, fərqi modulundan böyükdür (bu, **üçbucaq bərabərsizliyi** adlanır).

- Üçbucağın tənbölənləri bir nöqtədə kəsişir.
- Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişir.

Yuxarıda ümumi şəkildə verilmiş qaydalardan istifadə edərək üçbucaqlar bölməsinə dair aşağıdakı məsələləri isbat edək.

Məsələ 1. Bir üçbucağın bir tərəfi və həmin tərəf qarşısındakı bucaq və onun tənböləni, o biri üçbucağın uyğun olaraq o biri tərəfinə və həmin tərəfin qarşısındakı bucağa və onun tənböləninə bərabər olarsa, həmin üçbucaqlar bərabər olar. Bunu isbat edin.

İsbati.

Tutaq ki, ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarında (şəkil 1).

$AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ və $BP = B_1P_1$

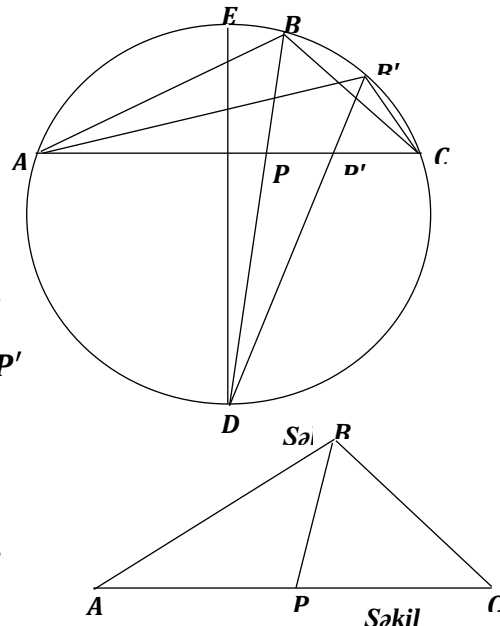
(BP və B_1P_1 uyğun olaraq ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarının tənbölənləridir. DE diametri AC tərəfinə perpendikulyar olmaq şərti ilə ABC üçbucağının xaricinə çevrə çəkək. Sonra A_1C_1 tərəfi AC tərəfinin üzərinə düşmək şərti ilə $A_1B_1C_1$ üçbucağı ABC üçbucağı üzərinə qoyaq. Fərz edək ki, B_1 təpəsi B təpəsi üzərinə düşməyib o, B' vəziyyətini almışdır. D nöqtəsini B və B' ilə birləşdirək. Tutaq ki, $\angle DCB < \angle DCB'$ onda $DB > DB'$ və $DP < DP'$ olar. (çünki DP -nin AC üzərindəki proyeksiyası DP' -in AC üzərindəki proyeksiyasından kiçikdir).

$\begin{cases} DB > DB' \\ DP < DP' \end{cases}$ tərəf-tərəfə çıxaraq.

$DB - DP' > DB' - DP'$ olur. Buradan $DP > B'P'$ olur ki, bu da şərtə zidd olur. Demək, B_1 nöqtəsi B' vəziyyətində ola bilməyib B -nin üzərinə düşməlidir.

Bu halda isə $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ olur.

Məsələ 2. Üçbucaqda $3\sin B = 4\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$ doğru



olduqda üçbucağın tərəfləri arasındakı münasibəti tapın.

Həlli. Verilən bərabərlik üzərində aşağıdakı çevirmələri aparaq.

$$6\sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2}. \text{ Buradan } \frac{3}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{B}{2}} \text{ olur.}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}; \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \text{ düsturlarını sonuncu ifadədə nəzərə alsaq: } \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{\frac{p^2(p-a)(p-c)}{ac b^2}}}{\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}} = \frac{p}{b} \text{ alarıq.}$$

Buradan $2p = 3b$ və ya $a + b + c = 3b; a + c = 2b$ olur. Buradan aşkar olunur ki, verilən münasibətdə üçbucağın tərəfləri ədədi silsilə əmələ gətirir.

Məsələ 3. Üçbucağın tərəfləri ədədi silsilə əmələ gətirirsə, onda bu üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin radiusu onun hündürlüklərindən birinin $\frac{1}{3}$ -nə bərabər olduğunu isbat edin.

İsbati. Üçbucağın tərəflərini a, b, c ilə işarə edək. Məsələnin şərtinə əsasən a, b, c ədədi silsilə əmələ gətirir. Onda $b = a + d; c = a + 2d$ olar. Bu qiymətləri $S = pr$ düsturunda yerinə yazaq və onun üzərində çevirmələr aparsaq $S = pr = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{(3a+3d)r}{2} = \frac{3(a+d)r}{2}$.

Üçbucağın B təpəsindən qarşıdakı tərəfə çəkilən hündürlüyü h_b ilə işarə etsək, həmin üçbucağın sahəsi $S = \frac{bh_b}{2} = \frac{(a+d)h_b}{2}$ ifadəsinə bərabər olar. Üçbucağın sahəsi üçün alınan bu iki ifadəni tutuşdursaq $\frac{3(a+d)r}{2} = \frac{(a+d)h_b}{2}$ olar. Buradan isə $3r = h_b$ və ya $r = \frac{h_b}{3}$ olar.

Məsələ 4. Hər hansı üçbucaq üçün $OH \geq KH\sqrt{2}$ bərabərliyin doğruluğunu isbat edin. O, K uyğun olaraq üçbucağın xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzləri, H isə hündürlüklərin kəsişdiyi nöqtədir.

İsbati. Aşağıdakı məlum ifadələri yazaq və onların üzərində göstərilən çevirmələri aparaq.

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2), R^2 \geq 4r^2 + KH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$$

$$\text{Buradan, } OH^2 = R^2 + 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2) - 4r^2 \geq 2(4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2).$$

$$\text{Beləliklə, } OH^2 \geq 2KH^2 \text{ və ya } OH \geq KH\sqrt{2} \text{ olur.}$$

Baxdığımız hər bir həndəsə məsələlərində bir neçə xüsusi hala əsaslanaraq ümumi nəticə çıxartdıq. Belə mühakimələr deduksiya və natamam induksiya adlanır. Beləliklə, deduksiya və natamam induksiya elə mühakimə prosesinə deyilir ki, bu mühakimə zamanı hər hansı obyektlər toplusunun sonlu sayda obyektləri müəyyən xassələrə malik olduqda, bütün obyektlərin həmin xassələrə malik olması nəticəsi çıxarılır.

Problemin aktuallığı. Riyaziyyatın tədrisində isbat məsələlərinə hər sinifdə müəyyən qədər yer ayrılır. Şagirdlərin nəzərinə çatdırılmalıdır ki, isbat məsələlərinin həlli sistemli, dəqiq, ardıcıl olmalıdır. Riyaziyyat təlimində isbat məsələləri şagirdlərdə analiz və sintez kimi məsələləri, tədqiqatçılıq qabiliyyətini, müstəqil düşünməni inkişaf etdirir. Eyni zamanda isbat məsələlərinin təfəkkür fəallığını inkişaf etdirməkdə rolu danılmazdır. Bu isə müasir təlim texnologiyaları baxımından aktuallıq kəsb edir.

Problemin elmi yeniliyi. Məqalədə həndəsə məsələlərinin isbat yolu ilə həlli prosesində

müxtəlif metodlardan istifadə yollarından bəhs edir. Xüsusilə də, riyaziyyatın həndəsə məzmun xəttində bir bölmə olan “Üçbucaqlar” mövzusunda isbat məsələlərinə baxılır. Bu isbat məsələlərini həll etmək üçün istifadə olunan isbat üsulları qeyd edilir. İsbatların həndəsə məsələlərinin həllində əhəmiyyətindən bəhs edir. Hal-hazırda istifadə olunan müasir riyaziyyat dərslərlərində və növbəti illərdə ümumtəhsil müəssisələrində istifadəyə veriləcək dərslərlərdə isbat məsələlərinə xüsusilə yer ayrılır.

Problemin praktik əhəmiyyəti və tətbiqi. Orta məktəbin riyaziyyat təlimində “Həndəsə” məzmun xəttinə dair müxtəlif siniflərdə isbat məsələlərinin həllindən gənc tədqiqatçılar, tələbələr, magistrantlar və o cümlədən orta məktəb müəllimləri və şagirdləri kifayət qədər yararlanırlar.

Ədəbiyyat

1. Adigözəlov A.S., Acalova N.A., Xudaverdiyeva G.N. Həndəsədən qurma məsələlərinin həlli metodları: Metodik göstəriş). Bakı: N.Tusi adına ADPU, 1993. 69 s.
2. Əliyev İ.F. Elementar həndəsə. Bakı, 2009.
3. Əsgərov K.S., Adigözəlov A.S., Məmmədov A.A. Həndəsədən məsələ həlli praktikumu: Dərs vəsaiti. Bakı: V.İ.Lenin adına API-nin nəşri, 1986. - 117 s.
4. Əsgərov K.S., Axundov S.S. Elementar həndəsə. Bakı: API-nin nəşri, 1974. 211 s.
5. Адамар Ж. Элементарная геометрия. Ч.II.Стерометрия. М., 1958, 787 с.
6. Аргунов Б.Ф., Балк М.Б. Элементарная геометрия. М., 1966.
7. Базылев В.Т. и др. Геометрия, ч. I. М.: Просвещение, 1986, ч. II, 1987.
8. Василевский А.Б. Методы решения геометрических задач. Минск: Высшая школа, 1969. - 232 с.

Л.С. Шихлинская

О решении треугольников и некоторых связанных с ними задач путем доказательства Резюме

Помимо решения задач и примеров в математическом образовании особое значение имеют также вопросы, связанные с доказательством. Математические проблемы доказательства побуждают учащихся проводить исследования, включая логические суждения, анализ и синтез. В статье даются общие сведения о понятии доказательства и показаны способы доказывания вопросов, относящихся к разделу “Треугольники”, имеющему большое значение в содержательной линии “геометрия”.

L.S. Shikhlinskaya

**On the solution of triangles and some problems related to them by means of proof
Summary**

In addition to solving problems and examples in mathematics education, issues related to proof are also of special importance. Mathematical problems of proof encourage students to conduct research, including logical judgments, analysis and synthesis. The article provides general information about the concept of proof and shows the ways of proving issues related to the “Triangles” section, which is of great importance in the “geometry” content line.

Redaksiyaya daxil olub: 19.12.2024